2008-2009 Семинар k2-m1-06

Тема: Интеграл Фурье

Пусть $f(x)$ кусочно непрерывна на любом конечном промежутке числовой оси, f' также кусочно непрерывна на любом конечном промежутке числовой оси, причем в точках разрыва существуют конечные предельные значения $f(x)$ и $f'(x)$ справа и слева. (такие функции называют кусочно гладкими). Пусть к тому же $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, Тогда $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\right]dx$, где $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt$, $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)dt$, причем все несобственные интегралы сходятся. Если к тому же $\forall x \Longrightarrow f(x)=f(-x)$, т.е. $f(x)$ четная, то $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}A(\omega)\cos(\omega x)dx$, где $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt$, а если $\forall x \Longrightarrow f(x)=-f(-x)$, т.е. $f(x)$ нечетная, то $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}B(\omega)\sin(\omega x)dx$, где $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt$. В точках непрерывности $f(x)$ можно заменить $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ на $f(x)$.

1. Линейная функция

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1,\ x\in[-1;1],\\ 0,\ x\notin[-1;1].\end{cases}$

♦ $F_c(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

2. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1-|x|,\ x\in[-1;1],\\ 0,\ x\notin[-1;1].\end{cases}$

♦ $F_c(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}$.

2. Функция ошибок

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

♦ $F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=e^{-x^2}$

♦ $F_c(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3. Показательная функция

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=e^{-|x|}$.

♦ $F_c(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x\geqslant 0,\\ -e^{x},\ x<0.\end{cases}$

♦ $F_c(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$.

4. Метод дифференцирования по параметру

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Используя результат представления в виде интеграла Фурье функции $f(x)=e^{-|x|}$, для которой $F_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$, представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}xe^{-x},\ x\geqslant 0,\\ -xe^{x},\ x<0.\end{cases}$

♦ $F_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}te^{-t}\sin(\omega t)dt=-\frac{d}{d\omega}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$,

8. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=x^2e^{-|x|}$

9. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

♦ $F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. Используя результат представления в виде интеграла Фурье функции $f(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x\geqslant 0,\\ -e^{x},\ x<0,\end{cases}$ для которой $F_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$, представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=xe^{-|x|}$

♦ $F_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos(\omega t)dt=\frac{d}{d\omega}\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$,

11. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x},\ x\geqslant 0,\\ -x^2e^{x},\ x<0.\end{cases}$

12. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

5. Метод перемены порядка интегрирования

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

13. Используя результат представления в виде интеграла Фурье функции $f(x)=e^{-|x|}$, для которой **(1)** $f(x)=\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega=e^{-|x|}$, **(2)** $F_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$, представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

♦ $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=e^{-|x|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega t\,d\omega=e^{-|t|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\cos xt\,dx=e^{-|t|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\cos\omega x\,dx=e^{-|\omega|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos\omega t\,dt=\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}$, $F_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos(\omega t)dt=e^{-|\omega|}$,

14. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (функция не является абсолютно интегрируемой, но нам это не помешает).

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

15. Используя результат представления в виде интеграла Фурье функции $f(x)=\operatorname{sign}x\,e^{-|x|}=\begin{cases} e^{-x},\ x\geqslant 0,\\ -e^{x},\ x<0,\end{cases}$ для которой **(1)** $f(x)=\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\operatorname{sign}xe^{-|x|}$, **(2)** $F_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$, представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

♦ $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega=\operatorname{sign}xe^{-|x|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\sin\omega x\,dx=\operatorname{sign}\omega\,e^{-|\omega|}$, $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\sin\omega t\,dt=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\omega\,e^{-|\omega|}$, $F_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\sin(\omega t)dt=\operatorname{sign}\omega\,e^{-|\omega|}$,

16. Представьте в виде интеграла Фурье функцию $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

6. Метод прямого интегрирования

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

17. Представьте в виде интеграла Фурье функцию **(1)** $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$. **(2)** $f(x)=xe^{-\alpha|x|}\cos\beta x$.

18. Представьте в виде интеграла Фурье функцию **(1)** $f(x)=\operatorname{sign}x\,e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$. **(2)** $f(x)=|x|e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

19. Представьте в виде интеграла Фурье функцию **(1)** $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$. **(2)** $f(x)=xe^{-\alpha|x|}\sin\beta x$.

20. Представьте в виде интеграла Фурье функцию **(1)** $f(x)=\operatorname{sign}x\,e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$. **(2)** $f(x)=|x|e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$.

7. Синус– и косинус– преобразования

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

21. Представьте в виде косинус–интеграла Фурье, $f(x)=\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega$, $x>0$, функцию $f(x)=\begin{cases} 1,\ x\in[0;1],\\ 0,\ x\in(1;+\infty).\end{cases}$

♦ $F_c(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

22. Представьте в виде синус–интеграла Фурье, $f(x)=\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega$, $x>0$, функцию $f(x)=\begin{cases} 1,\ x\in[0;1],\\ 0,\ x\in(1;+\infty),\end{cases}$

♦ $F_s(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\omega}{\omega}$.

8. Комплексное преобразование Фурье

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

23. Представьте в виде комплексного интеграла Фурье, $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega$, функцию $f(x)=\begin{cases} 1,\ x\in[0;1],\\ 0,\ x\notin[0;1].\end{cases}$

♦ $F(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

24. Представьте в виде комплексного интеграла Фурье, $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega$, функцию $f(x)=\begin{cases} 1,\ x\in[1;2],\\ 0,\ x\notin[1;2].\end{cases}$

♦ $F(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{2i\omega}-e^{i\omega}}{i\omega}$.