

## 2008-2009 Семинар k2-m2-02

### Тема: Числовые ряды

#### 1. Вычисление суммы числового ряда

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

1. Исследуйте сходимость и вычислите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ ; (2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ ;

**Д** Обязательное задание на дом.

2. Исследуйте сходимость и вычислите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n}$ ; (2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ ;

#### 2. Вычисление суммы числового ряда

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Исследуйте сходимость и вычислите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ ;  $\blacklozenge S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ .

4. (1) Найдите  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-n}$ ,  $|x| > 1$ . (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{-n}$ ,  $|x| > 1$ . (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{-n}$ ,  $|x| > 1$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

5. Исследуйте сходимость и вычислите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(n+7)}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ ;

$\blacklozenge S = \frac{1}{18} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+7)}$ ;

$\blacklozenge S = \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}\right)$ .

6. (1) Найдите  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{-n}$ ,  $|x| > 1$ .

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{-n}$ ,  $|x| > 1$ . (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2 x^{-n}$ ,  $|x| > 1$ .

#### 3. Вычисление суммы числового ряда

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

7. Исследуйте сходимость и найдите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ , (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)]$ ,

(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \sin \left[ \frac{1}{2n(n+1)} \right] \cdot \sin \left[ \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right]$ ,

(5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} [e^{-n} - e^{-n-1}]$ ,

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

8. Исследуйте сходимость и найдите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ ,

(2)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)$ ,

(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} [\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n)]$ ,

(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \sin \left[ \frac{1}{2n(n+1)} \right] \cdot \cos \left[ \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right]$ ,

(5)  $\sum_{n=0}^{+\infty} [e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}]$ ,

4. Вычисление суммы числового ряда

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. Исследуйте сходимость и найдите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ ;  $\blacklozenge S = 1$ . (2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$ ;

$\blacklozenge S = 1$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. Исследуйте сходимость и найдите сумму (если сходится), (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ ,

$\blacklozenge S = 1 - \sqrt{2}$ . (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$ ;  $\blacklozenge S = \pi/4$ .

## 5. Сравнение с обобщенным гармоническим рядом

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

11. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ , (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ;  
(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1,001}}$ ;  
(6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{0,999}}$ ;

**Д** Обязательное задание на дом.

12. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ;  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n}$ ;  
(5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1,123456789}}$ , (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{0,987654321}}$ ;

## 6. Интегральный признак и сравнение с обобщенным гармоническим рядом

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

13. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ;  
(2)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ ; (3)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{2004}}$ ; (4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ ;  
(5)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ ;

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

14. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ ;  
(2)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ , (3)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ , (4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ ;  
(5)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ ;

## 7. Необходимое условие сходимости

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

15. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\blacklozenge$  Расходится, (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$ ;  
 $\blacklozenge$  Расходится, (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,  
(5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\ln n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится, (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (0,07)^{1/n}$ ;  
 $\blacklozenge$  Расходится, (7)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

(8)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n)$ ;  $\blacklozenge$  Расходится, (9)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$ ,

$\blacklozenge$  Расходится, (10)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1 - \cos \frac{1}{n})$ ,  $\blacklozenge$  Сходится.

(11)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$ ;  $\blacklozenge$  Расходится,

(12)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1 - e^{\frac{1}{n}})$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

(13)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$ ,  $\blacklozenge$  Сходится,

$\square$  **Д** Обязательное задание на дом.

16. Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ ;

$\blacklozenge$  Расходится, (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$ ;  $\blacklozenge$  Расходится,

(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится, (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\ln n + n + n^2}$ ,

$\blacklozenge$  Расходится, (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{1/n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

(7)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n})$ ;  $\blacklozenge$  Расходится, (8)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$ ,

$\blacklozenge$  Расходится, (9)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

(10)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{1}{n}$ ,  $\blacklozenge$  Расходится, (11)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$ ;

$\blacklozenge$  Расходится, (12)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ ,  $\blacklozenge$  Расходится,

8. Сравнение с обобщенным гармоническим рядом

$\square$  **С** Для обязательного разбора на семинаре.

17. Исследуйте сходимость,

(1)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1})$ ,

(2)  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1})$ ,

(3)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^3 + 2n + 1} - \sqrt{n^3 - 2n + 1})$ ,

(4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$ ,

$\square$  **Д** Обязательное задание на дом.

18. Исследуйте сходимость,

(1)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ ,

(2)  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(\sqrt{n^5 + 1} - \sqrt{n^5 - 1})$ ,

(3)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^7 + 2n^3 + 1} - \sqrt{n^7 - 2n^3 + 1})$ ,

(4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt[3]{n^7 + 3n + 1} - \sqrt[3]{n^7 - 3n + 1})$ ,

## 9. Сравнение с обобщенным гармоническим рядом

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

19. Исследуйте сходимость: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{2}{n}\right)$ ,  
(4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ ;

20. Исследуйте сходимость:

- (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{2}{n}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ ,  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ ,

**Д** Обязательное задание на дом.

21. Исследуйте сходимость: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\arcsin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ ,  
(4)  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt[n]{n^2} - 1)$ ,

22. Исследуйте сходимость:

- (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{2}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ ,  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{n} + \operatorname{tg}\left(\frac{2}{n}\right)\right]$ ;

## 10. Сравнение с геометрической прогрессией

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

23. Исследуйте сходимость с помощью признака

- Даламбера: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7}{n!}$ ,  
(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ , (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$ , (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ,  
(7)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$ , (8)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!}$ ,  
(9)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$ ,

**Д** Обязательное задание на дом.

24. Исследуйте сходимость с помощью признака

- Даламбера: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$ ,  
(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ , (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$ , (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ ,  
(7)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ , (8)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$ ; (9)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2^n (n+1)!}$ ;

## 11. Сравнение с геометрической прогрессией

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

**25.** Исследуйте сходимость с помощью признака

Коши: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$ ;  
(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n}{(3+\frac{1}{n})^n}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+7}{3n-1}\right)^n$ ;  
(6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+4}\right)^{n(n-3)}$ ,

**Д** Обязательное задание на дом.

**26.** Исследуйте сходимость с помощью признака

Коши: (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n^2}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n}$ ;  
(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^n$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$ ,

## 12. Эталонные последовательности

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

**27.** Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n!}$ ;  
(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2008}}{(1,001)^n}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^n}$ ;  
(5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3}$ ; (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^n}$ ; (7)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

**28.** Исследуйте сходимость, (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$ ;  
(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^n}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2^n)^n}$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3 \cdot 2^n}}{n!}$ .