

1. Понятие предела функции

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 2x + 1$, $a = 3$, $b = 7$, $\epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

◆ $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 3x - 2$, $a = 3$, $b = 7$, $\epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

◆ $\delta = \frac{\epsilon}{3}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Укажите наибольшее значение числа δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$, $b = 3$, $\epsilon = 10^{-1}$. Представьте полученное значение в виде десятичной дроби, не пользуясь калькулятором.

◆ $\delta = 3^3 - 2.9^3 = 2.611$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Укажите наибольшее значение числа δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 64$, $b = 4$, $\epsilon = 10^{-1}$. Представьте полученное значение в виде десятичной дроби, не пользуясь калькулятором.

◆ $\delta = 4^3 - 3.9^3 = 4.681$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 3^x$, $a = 4$, $b = f(a)$, $\epsilon = 1$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

6. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = \sin x$, $a = 2$, $b = f(a)$, $\epsilon = 0,01$.

2. Прямое вычисление предела функции в точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

7. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

8. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x - 2})$,

9. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt{9+x}}{x}$,

10. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[12]{x} - 1}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x - 3}$; (5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{\sqrt{x+6} - 3}$,

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$,

Д Обязательное задание на дом.

11. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$,

12. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2})$,

13. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[4]{16+x}}{x}$,

14. ★ Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt[3]{x+9} - 3}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$.

3. Прямое вычисление предела функции в бесконечно удаленной точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

15. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

16. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 2})$,

Д Обязательное задание на дом.

17. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1}$.

18. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt{9+x}}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$.

4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

19. Каждая элементарная функция, x^α , $\frac{ax+b}{cx+d}$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\log_a x$, b^x , а также композиция элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

- (1) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow 0$. (2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \pi$. (3) $f(x) = \sin x$, $x \rightarrow 0$. (4) $f(x) = x \sin x$, $x \rightarrow 0$.
 (5) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $x \rightarrow +0$. (6) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$. (7) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow 1$. (8) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow +\infty$.
 (9) $f(x) = x^2 \ln x$, $x \rightarrow +\infty$. (10) $f(x) = x^{-1}$, $x \rightarrow +\infty$. (11) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow +\infty$.
 (12) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, $x \rightarrow +\infty$. (13) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow +\infty$. (14) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \rightarrow +\infty$.
 (15) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}$, $x \rightarrow +\infty$. (16) $f(x) = \frac{x^2+6}{x^3+5}$, $x \rightarrow +\infty$. (17) $f(x) = \frac{x^3+6}{x^2+5}$, $x \rightarrow +\infty$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

20. Каждая элементарная функция, x^α , $\frac{ax+b}{cx+d}$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\log_a x$, b^x , а также композиция элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

- (1) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$. (2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. (3) $f(x) = \sin x$, $x \rightarrow \pi$. (4) $f(x) = x \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow 0$.
 (5) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. (6) $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow +\infty$. (7) $f(x) = \ln(x+1)$, $x \rightarrow 0$. (8) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow +0$.
 (9) $f(x) = x \ln x$, $x \rightarrow +\infty$. (10) $f(x) = x^{-2}$, $x \rightarrow +\infty$. (11) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow 0$. (12) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $x \rightarrow +\infty$.
 (13) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +0$. (14) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, $x \rightarrow 0$. (15) $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$, $x \rightarrow +\infty$. (16) $f(x) = \frac{x+6}{x^2+5}$, $x \rightarrow +\infty$.
 (17) $f(x) = \frac{x^2+6}{x+5}$, $x \rightarrow +\infty$.

5. Свойства пределов

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

21. Постройте отрицание: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N, \exists m \geq N : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$.

22. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a . Укажите все верные утверждения (все пределы при $x \rightarrow a$).

- (a) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ имеет предел
 (b) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
 (c) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
 (d) Если $f(x) + g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
 (e) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
 (f) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел

Ответ: (c)

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

23. Постройте отрицание: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N, \forall p \geq 1 \implies |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

24. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a . Укажите все верные утверждения. Все пределы при $x \rightarrow a$.

- (a) Если $f(x) - g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
 (b) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
 (c) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел
 (d) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ имеет предел
 (e) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела
 (f) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела

Ответ: (c)

6. Односторонние пределы

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

25. Пусть $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ Существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
 Ответ обоснуйте.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

26. Пусть $f(x) = \frac{|x|}{x^2-x}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ Существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
 Ответ обоснуйте.