

При выполнении заданий этого раздела можно использовать равенство  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ .

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

1. Найдите (1)  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ ,  $p < 1$ , (2)  $\int_0^1 \ln x dx$ , (3)  $\int_0^1 x \ln x dx$ , (4)  $\int_0^1 x^7 \ln x dx$ , (5)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$ , (6)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^4}$ , (7)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ , (8)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ , (9)  $\int_0^{+\infty} x^7 e^{-x} dx$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

2. Найдите (1)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ,  $p > 1$ , (2)  $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$ , (3)  $\int_0^1 x \sqrt{x} \ln x dx$ , (4)  $\int_0^1 x^8 \ln x dx$ , (5)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$ , (6)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^5}$ , (7)  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ , (8)  $\int_0^{+\infty} x^9 e^{-x} dx$ .

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

3. (1) Используя равенство  $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$ ,  $p > -1$ , найдите значение  $\int_0^1 x^p \ln x dx$ ,  $\int_0^1 x^p (\ln x)^n dx$ , (2) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p}$ ,  $p > 0$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x e^{-px} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x^7 e^{-px} dx$ , (3) Используя равенство  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ , найдите значение  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx$ , (4) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin qx dx = \frac{q}{p^2+q^2}$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x e^{-px} \sin qx dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x e^{-px} \cos qx dx$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

4. (1) Используя равенство  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ ,  $p > 1$ , найдите значение  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^p}$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^n dx}{x^p}$ , (2) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p}$ ,  $p > 0$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x^{1234} e^{-px} dx$ , (3) Используя равенство  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx = \sigma^2$ , найдите значение  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^4 dx$ , (4) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos qx dx = \frac{p}{p^2+q^2}$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x e^{-px} \sin qx dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x e^{-px} \cos qx dx$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

5. Пусть функция  $\rho(x)$  определена на промежутке  $(a; b)$ ,  $\rho(x) \geq 0$ ,  $M[1] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \rho(x) dx$ ,  $M[1] > 0$ ,  $M[x] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x \rho(x) dx$ ,  $M[x^2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x^2 \rho(x) dx$ ,  $\langle x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$ ,  $\langle x^2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x^2]}{M[x]}$ ,  $Dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ . Вычислите все указанные величины для (1)  $\rho(x) = \frac{1}{x^4}$ ,  $x \in (1; +\infty)$ , (2)  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0; 1)$ , (3)  $\rho(x) = -\ln x$ ,  $x \in (0; 1)$ , (4)  $\rho(x) = -x^7 \ln x$ ,  $x \in (0; 1)$ , (5)  $\rho(x) = e^{-x}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , (6)  $\rho(x) = x^7 e^{-x}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , (7)  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Пусть функция  $\rho(x)$  определена на промежутке  $(a; b)$ ,  $\rho(x) \geq 0$ ,  $M[1] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \rho(x) dx$ ,  $M[1] > 0$ ,  $M[x] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x \rho(x) dx$ ,  $M[x^2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x^2 \rho(x) dx$ ,  $\langle x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$ ,  $\langle x^2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x^2]}{M[x]}$ ,  $Dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ . Вычислите все указанные величины для (1)  $\rho(x) = \frac{1}{x^5}$ ,  $x \in (1; +\infty)$ , (2)  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ,  $x \in (0; 1)$ , (3)  $\rho(x) = -x \ln x$ ,  $x \in (0; 1)$ , (4)  $\rho(x) = -x^8 \ln x$ ,  $x \in (0; 1)$ , (5)  $\rho(x) = x e^{-x}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , (6)  $\rho(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , (7)  $\rho(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

7. (1) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin qx dx = \frac{q}{p^2+q^2}$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} \sin qx dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} \cos qx dx$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

8. (1) Используя равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos qx dx = \frac{p}{p^2+q^2}$ , найдите значение  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} \sin qx dx$ ,  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} \cos qx dx$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. (1) Найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . (2) Найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{p^2+x^2}$ . (3) Продифференцируйте только что полученное равенство по параметру и найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(p^2+x^2)^2}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. (1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(p^2+x^2)^3}$ ,