А.А.Быков, bykv@mail.ru, http://bykv.narod.ru
Т573 (2003-2004) **Домашнее задание 8 учебной недели** **Вариант 1208-21**

1. Укажите все точки разрыва функции $y = \operatorname{tg} x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

2. Укажите все точки разрыва функции $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

3. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1)}{(e^{x^2-2} - 1)(x-1)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x < 0, \\ \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва. Классифицируйте точку разрыва (устранимый, первого, второго рода)

7. Классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 - x}$

8. Укажите все верные утверждения: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то
(a) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
(b) $\exists \delta > 0 : \forall a : |a - x_0| < \delta \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
(c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(d) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
(e) $f(x)$ имеет касательную в точке x_0.
(f) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

9. Пусть $y = f(x)$ – строго возрастающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

10. Пусть $x \to 0$. Что означает запись $o(1) \cdot o(1) = o(1)$? Если это верно, докажите; если неверно, приведите опровергающий пример.

11. Пользуясь определением и свойствами символа $O(f)$, докажите, что на множестве $x \in [-0.5;\ 0.5]$ имеет место соотношение $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$ при $x \to 0$

12. Докажите, что $o(x^2) \cdot o(x^3) = o(x^5)$ при $x \to 0$

13. Пусть $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и $\exists \delta > 0 :\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \neq 0$. Что означает формула $o(f^2) \cdot o(f) = o(f^3)$? Докажите или приведите опровергающий пример.

14. Теорема. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

15. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$ **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$ **(e)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x:\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$ **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x:\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A\,|x|$

16. Докажите, что если $f(x) = o\Big(x + o(x)\Big)$ при $x \to a$, то $f(x) = o(x)$ при $x \to a$.

17. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : f(g(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов p, q.

18. Докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$. Вычислите приближенно $\sqrt{1.04}$

19. Используя формулы $\sin x = x + o(x)$ и $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, докажите, что $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

20. Пользуясь определением и свойствами символа $o(f)$, докажите, что $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$

21. Используя формулу $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\sin 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

22. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

23. Используя формулу $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$ при $x \to 0$, вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+7x^2} - \sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$

24. Используя формулы $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(3x) - 3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x) - 2\operatorname{tg} x}$

25. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена, непрерывна и возрастает функция $f(x)$, в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $f^{-1}(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = 2x + x^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$, а функция $f^{-1}(x)$ может быть представлена в виде $f^{-1}(x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов p, q