А.А.Быков, bykv@mail.ru, http://bykv.narod.ru
Т573 (2003-2004) **Домашнее задание 8 учебной недели** **Вариант 1208-22**

1. Укажите все точки разрыва функции $y = \operatorname{ctg} x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

2. Укажите все точки разрыва функции $y = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

3. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{x-2}{2^x - 4}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{e^{x^4-2x^2+1} - 1}{(x^2-x)(x^2-2)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Укажите все точки разрыва функции $y = \dfrac{|x|}{x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x} & \text{при } x < 0, \\ \cos \dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва. Классифицируйте точку разрыва (устранимый, первого, второго рода)

7. Классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

8. Укажите все верные утверждения: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то
(a) $f(x)$ имеет касательную в точке x_0.
(b) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
(c) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
(d) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
(e) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(f) $\exists \delta > 0 : \forall a : |a - x_0| < \delta \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

9. Пусть $y = f(x)$ – строго убывающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(b);\ f(a)]$.

10. Пусть $x \to 0$. Что означает запись $o(1) + o(1) = o(1)$? Если это верно, докажите; если неверно, приведите опровергающий пример.

11. Пользуясь определением и свойствами символа $O(f)$, докажите, что на множестве $x \in [-0.1;\ 0.1]$ имеет место соотношение $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + O(x^3)$ при $x \to 0$

12. Рассмотрим только строго положительные функции. Докажите, что $o(\sqrt{x}) \cdot o(\sqrt[3]{x}) = o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x \to 0$

13. Пусть $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и $\exists \delta > 0 :\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \neq 0$. Что означает формула $o(f^3) \cdot o(f^2) = o(f^5)$? Докажите или приведите опровергающий пример.

14. Теорема. Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +\infty$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

15. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$ **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$ **(e)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$ **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A\,|x|$

16. Докажите, что если $f(x) = o\Big(x^2 + o(x^2)\Big)$ при $x \to a$, то $f(x) = o(x^2)$ при $x \to a$.

17. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : g(f(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

18. Докажите, что $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$. Вычислите приближенно $\dfrac{1}{0.98}$

19. Используя формулы $\sin x = x + \gamma x^3 + o(x^3)$, при $x \to 0$, γ – неизвестная константа, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ докажите, что $\gamma = -\dfrac{1}{6}$

20. Пользуясь определением и свойствами символа $o(f)$, докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$

21. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$

22. Используя формулу $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\sin(\sin x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$

23. Используя формулу $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$ при $x \to 0$, вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right)$

24. Используя формулы $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(3x) - 3 \operatorname{arctg} x}{\sin(2x) - 2 \sin x}$

25. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена, непрерывна и возрастает функция $f(x)$, в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $f^{-1}(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = 3x + 2x^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$, а функция $f^{-1}(x)$ может быть представлена в виде $f^{-1}(x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$