

1. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{1}{\sin x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

2. Укажите все точки разрыва функции $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

3. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2 - x)(x^2 - 2)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{x|x| - x}{|x|}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & \text{при } x < 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва. Классифицируйте точку разрыва (устранимый, первого, второго рода)

7. Классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

8. Укажите все верные утверждения: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то

(a) найдется такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x)$ ограничена.

(b) $\exists \delta > 0 : \forall a : |a - x_0| < \delta \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

(c) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(d) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

(e) $f(x)$ имеет касательную в точке x_0 .

(f) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

9. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная на промежутке $[a; b]$. Сформулируйте необходимые условия существования обратной функции на промежутке $[f(a); f(b)]$.

10. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Что означает запись $o(1) \cdot o(1) = o(1)$? Если это верно, докажите; если неверно, приведите опровергающий пример.

11. Пользуясь определением и свойствами символа $O(f)$, докажите, что на множестве $x \in [-0.5; 0.5]$ имеет место соотношение $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$ при $x \rightarrow 0$

12. Докажите, что $o(x^4) \cdot o(x^3) = o(x^7)$ при $x \rightarrow 0$

13. Пусть $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) \neq 0$. Что означает формула $o(f) \cdot o(f^3) = o(f^4)$? Докажите или приведите опровергающий пример.

14. Теорема. $o(x^{-3}) + o(x^{-5}) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow +\infty$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

15. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны: (а) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(б) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (с) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ (д) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$

(е) $\exists A, \exists B : \forall x : x > B \implies |f(x)| \leq A$ (ф) $\exists A, \exists B : \forall x : x > B \implies |f(x)| \leq A|x|$

16. Докажите, что если $f(x) = o(x + o(x))$ при $x \rightarrow a$, то $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow a$.

17. Пусть $f(x) = 3x - x^2 + o(x^2)$, $g(x) = x + x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p, q : g(f(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Найдите значения коэффициентов p, q .

18. Докажите, что $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Вычислите приближенно $\frac{1}{1.01}$

19. Используя формулы $\sin x = x + o(x)$ и $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, докажите, что $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

20. Пользуясь определением и свойствами символа $o(f)$, докажите, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$

21. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 3x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

22. Используя формулы $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, докажите, что $\operatorname{tg}(\sin x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

23. Используя формулу $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right)$

24. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена, непрерывна и возрастает функция $f(x)$, в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $f^{-1}(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = 2x + 3x^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, а функция $f^{-1}(x)$ может быть представлена в виде $f^{-1}(x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$. Найдите значения коэффициентов p, q