

1. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{1}{\cos x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

2. Укажите все точки разрыва функции $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

3. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{e^{x-1} - 1}{x(x^2 - 1)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{x^2 - |x|}{x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \frac{\cos x}{x} & \text{при } x < 0, \\ x \cos \frac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва. Классифицируйте точку разрыва (устранимый, первого, второго рода)

7. Классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$

8. Укажите все верные утверждения: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то
 (а) $f(x)$ имеет касательную в точке x_0 .
 (б) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.
 (в) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
 (г) найдется такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x)$ ограничена.
 (е) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
 (ф) $\exists \delta > 0 : \forall a : |a - x_0| < \delta \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

9. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная на промежутке $[a; b]$. Сформулируйте достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(b); f(a)]$.

10. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Что означает запись $o(1) + o(1) = o(1)$? Если это верно, докажите; если неверно, приведите опровергающий пример.

11. Пользуясь определением и свойствами символа $O(f)$, докажите, что на множестве $x \in [-0.1; 0.1]$ имеет место соотношение $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$ при $x \rightarrow 0$

12. Докажите, что $o(x^5) \cdot o(x^4) = o(x^9)$ при $x \rightarrow 0$

13. Пусть $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) \neq 0$. Что означает формула $o(f^3) \cdot o(f^4) = o(f^7)$? Докажите или приведите опровергающий пример.

14. Теорема. $o(x^3) + o(x^5) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

15. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(1/x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны: (а) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 (b) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (c) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ (d) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$
 (e) $\exists A, \exists B : \forall x : x > B \implies |f(x)| \leq A$ (f) $\exists A, \exists B : \forall x : x > B \implies |f(x)| \leq A|x|$

16. Докажите, что если $f(x) = o(x^2 + o(x^2))$ при $x \rightarrow a$, то $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow a$.

17. Пусть $f(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$, $g(x) = x - x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p, q : g(f(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Найдите значения коэффициентов p, q .

18. Докажите, что $\sqrt{1-2x} = 1 - x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Вычислите приближенно $\sqrt{1.06}$

19. Используя формулы $\sin x = x + \gamma x^3 + o(x^3)$, при $x \rightarrow 0$, γ - неизвестная константа, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ докажите, что $\gamma = -\frac{1}{6}$

20. Пользуясь определением и свойствами символа $o(f)$, докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$

21. Используя формулу $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, докажите, что $\sin 3x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

22. Используя формулы $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, докажите, что $\sin(\operatorname{tg} x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$ и найдите значения коэффициентов p, q

23. Используя формулу $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} \right)$

24. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена, непрерывна и возрастает функция $f(x)$, в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $f^{-1}(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = 2x + 4x^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, а функция $f^{-1}(x)$ может быть представлена в виде $f^{-1}(x) = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$. Найдите значения коэффициентов p, q