

1. Вычислите производную 2003-го порядка функции $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

2. Вычислите производную порядка 187 функции $y = x^2 \cdot \cos \frac{x}{3}$

3. Вычислите производную порядка n функции $y = \sin(x^2)$ в точке $x = 0$

4. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то

- (a) $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .
- (b) найдется такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x)$ ограничена.
- (c) найдется такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x)$ непрерывна.
- (d) график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0 .
- (e) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция в точке x_0 .
- (f) $\exists A: f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$.

5. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $y = \sqrt{7+x}$, если $x = 2$, $dx = 1$.

6. (a) Вычислите производную 100-го порядка функции $y = x(\ln x - 1)$. (b) Вычислите дифференциал указанного порядка для $x = 1$, $dx = 1$.

7. Пусть $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите du , если $x = 2$, $dx = 0,1$.

8. Пусть $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите d^2u , если $x = 2$, $dx = 0,1$

9. Докажите, что если $\exists f'(x)$ в точке $x = x_0$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

10. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ для $f(x) = (a + \alpha x)^{b+\beta x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $2.02^{2.99}$.

11. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ для $f(x) = (a + x \cos \varphi)^{b+x \sin \varphi}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $A = (2 + 0.01 \cos \varphi)^{3+0.01 \sin \varphi}$. При каком φ будет иметь место равенство $A = 2^3$?

12. Используя упрощенное правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ если $f(x) - f(a) = o(1)$, вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x}}{x}$

13. Используя упрощенное правило Лопиталья второго порядка, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2} f''(a)$ если одновременно $f(x) - f(a) = o(1)$, $f'(x) - f'(a) = o(1)$ и $\exists f''(a)$ вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[12]{1+4x} - \sqrt[15]{1+5x}}{x^2}$

14. Используя упрощенное правило Лопиталья третьего порядка, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^3} = \frac{1}{6} f'''(a)$ если одновременно $f(x) - f(a) = o(1)$, $f'(x) - f'(a) = o(1)$, $f''(x) - f''(a) = o(1)$ и $\exists f^{(3)}(a)$, вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3 \sin(x)}{x^3}$

15. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \arcsin 3x - 6x}{x^5}$

16. Нарисуйте эскиз графика функции $y = \int_0^x (x - 2)^2 \cdot (x - 4)^3 dx$. Найдите координаты характерных точек (экстремумы, перегибы).

17. Нарисуйте эскиз графика функции $y = (\ln(x))^6$.

18. Неопределенный интеграл $\int \ln x dx$ равен (константа C для краткости опущена):
 (a) $x(\ln x + 1)$. (b) $x(\ln x - 1)$. (c) $\ln x + 1$. (d) $x \ln x$. (e) $\frac{1}{x}$. (f) $\frac{-1}{x^2}$.

19. Площадь фигуры на плоскости, ограниченной параболой $y = 2x^2$ и прямой $y = 3x$, равна:
 (a) $\frac{9}{8}$. (b) $\frac{27}{8}$. (c) $\frac{1}{6}$. (d) $\frac{9}{4}$. (e) $\frac{8}{9}$. (f) $\frac{3}{2}$.

20. Предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1})$ равен:
 (a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 4. (e) 8. (f) Конечный предел не существует.

21. Исследуйте поведение каждой из следующих функций при $x \rightarrow +0$:
 (I) $f_1(x) = \log_2 x$. (II) $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. (III) $f_3(x) = x^2$. (IV) $f_4(x) = \frac{\sin x}{x}$.
 (V) $f_5(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. (VI) $f_6(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$. (a) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$. (b) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$.
 (c) Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности $x = +0$ (т.е. на некотором интервале $0 < x < \delta$), но утверждение $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ - неверно. (d) Функция $f(x)$ является ограниченной в окрестности $x = +0$ (т.е. на некотором интервале $0 < x < \delta$), но конечный предел $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ не существует. (e) Существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \neq 0$. (f) Существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$.

22. Исследуйте свойства функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в окрестности точки $x = 0$ и при $x \rightarrow 0$.
 Примите во внимание, что символ $o(\dots)$ означает исследование некоторого предела при $x \rightarrow x_0$, а символ $O(\dots)$ означает исследование ограниченности некоторой функции в некоторой окрестности точки x_0 . Укажите все верные утверждения: (a) $f(x) = o(1)$. (b) $f(x) = O(1)$.
 (c) $f(x) = o(x)$. (d) $f(x) = O(x)$. (e) $f(x) = o(x^2)$. (f) $f(x) = O(x^2)$.