А.А.Быков, bykv@mail.ru, http://bykv.narod.ru

T575 (2004-2005) **Домашнее задание 10 учебной недели** Вариант 1210-12

1. Вычислите производную 2003-го порядка функции $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. Вычислите производную порядка 197 функции $y = x^2 \cdot \sin\frac{x}{2}$

3. Вычислите производную порядка n функции $y = e^{x^2}$ в точке $x = 0$

4. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то
(a) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.
(b) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
(c) график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0.
(d) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция в точке x_0.
(e) $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$.
(f) $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

5. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $y = \sqrt{11 - x}$, если $x = 2$, $dx = 1$.

6. **(a)** Вычислите производную 100–го порядка функции $y = \ln x$. **(b)** Вычислите дифференциал указанного порядка для $x = 1$, $dx = 1$.

7. Пусть $f(x) = e^{-3x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите du, если $x = 3$, $dx = 0,1$.

8. Пусть $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите d^2u, если $x = 3$, $dx = 0,1$

9. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, найдите приближенное значение для величины $\sin 2$. Оценку погрешности производить не обязательно.

10. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ для $f(x) = (a + \alpha x)^{b + \beta x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $2.02^{2.99}$.

11. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ для $f(x) = (a + x\cos\varphi)^{b + x\sin\varphi}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $A = (2 + 0.01\cos\varphi)^{3 + 0.01\sin\varphi}$. При каком φ будет иметь место равенство $A = 2^3$?

12. Используя упрощенное правило Лопиталя, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ если $f(x) - f(a) = o(1)$, вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1 + 5x} - \sqrt[5]{1 + 7x}}{x}$

13. Используя упрощенное правило Лопиталя второго порядка, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \dfrac{1}{2} f''(a)$ если одновременно $f(x) - f(a) = o(1)$, $f'(x) - f'(a) = o(1)$ и $\exists f''(a)$ вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1 + 12x} - \sqrt[5]{1 + 15x}}{x^2}$

14. Используя упрощенное правило Лопиталя третьего порядка, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^3}=\dfrac{1}{6}f'''(a)$ если одновременно $f(x)-f(a)=o(1)$, $f'(x)-f'(a)=o(1)$, $f''(x)-f''(a)=o(1)$ и $\exists f^{(3)}(a)$, вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)-3\arcsin(x)}{x^3}$

15. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{arctg}2x-4x}{x^5}$

16. Нарисуйте эскиз графика функции $y=\displaystyle\int_0^x (x-2)^3\cdot(x-4)^2\,dx$. Найдите координаты характерных точек (экстремумы, перегибы).

17. Нарисуйте эскиз графика функции $y=\Big(\ln(x)\Big)^5$.

18. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int xe^x dx$ равен (константа C для краткости опущена):
(a) $\dfrac{x^2}{2}e^x$. **(b)** $\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)e^x$. **(c)** $e^x(x+1)$. **(d)** $e^x(x-1)$. **(e)** $e^x(-x+1)$.
(f) $e^x(-x-1)$.

19. Площадь фигуры на плоскости, ограниченной параболой $y=3x^2$ и прямой $y=-2x$, равна:
(a) $\dfrac{4}{9}$. **(b)** $\dfrac{8}{9}$. **(c)** $\dfrac{2}{27}$. **(d)** $\dfrac{3}{27}$. **(e)** $\dfrac{4}{27}$. **(f)** $\dfrac{8}{27}$.

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}\right)$ равен:
(a) 0. **(b)** 1. **(c)** 2. **(d)** 4. **(e)** 8. **(f)** Конечный предел не существует.

21. Исследуйте поведение каждой из следующих функций при $x\to+0$:
(I) $f_1(x)=x^{-3}$. **(II)** $f_2(x)=\operatorname{ctg}x$. **(III)** $f_3(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **(IV)** $f_4(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.
(V) $f_5(x)=\log_{1/2}x^2$. **(VI)** $f_6(x)=x\cdot\ln x$. **(a)** $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. **(b)** $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$.
(c) Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности $x=+0$ (т.е. на некотором интервале $0<x<\delta$), но утверждение $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$ – неверно. **(d)** Функция $f(x)$ является ограниченной в окрестности $x=+0$ (т.е. на некотором интервале $0<x<\delta$), но конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ не существует. **(e)** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)\neq 0$. **(f)** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$.

22. Исследуйте свойства функции $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в окрестности точки $x=0$ и при $x\to 0$. Примите во внимание, что символ $o(\ldots)$ означает исследование некоторого предела при $x\to x_0$, а символ $O(\ldots)$ означает исследование ограниченности некоторой функции в некоторой окрестности точки x_0. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x)=o(1)$. **(b)** $f(x)=O(1)$.
(c) $f(x)=o(x)$. **(d)** $f(x)=O(x)$. **(e)** $f(x)=o(x^2)$. **(f)** $f(x)=O(x^2)$.