

1. Вычислите производную 2003-го порядка функции  $y = e^{x/3}$ .

2. Вычислите производную порядка 123 функции  $y = x^2 \cdot \sin(2x)$

3. Вычислите производную порядка  $n$  функции  $y = \cos(x^2)$  в точке  $x = 0$

4. Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ , то

(a)  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

(b) найдется такая окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x)$  ограничена.

(c) найдется такая окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x)$  непрерывна.

(d) график  $f(x)$  имеет касательную в точке  $x_0$ .

(e)  $f(x) - f(x_0)$  – бесконечно малая функция в точке  $x_0$ .

(f)  $\exists A: f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ .

5. Вычислите первый и второй дифференциалы функции  $y = \frac{1}{\sqrt{7+x}}$ , если  $x = 2$ ,  $dx = 1$ .

6. (a) Вычислите производную 100-го порядка функции  $y = \frac{1}{x^2}$ . (b) Вычислите дифференциал указанного порядка для  $x = 1$ ,  $dx = 1$ .

7. Пусть  $f(x) = e^{4x}$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 5$ ,  $u(x) = f(g(x))$ . Вычислите  $du$ , если  $x = 1$ ,  $dx = 0,1$ .

8. Пусть  $f(x) = e^{3x}$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 5$ ,  $u(x) = f(g(x))$ . Вычислите  $d^2u$ , если  $x = 1$ ,  $dx = 0,1$

9. Сформулируйте определение дифференциала функции  $f(x)$ . Докажите, что если  $\exists A: f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\exists f'(x)$  в точке  $x = x_0$ . Используя эту формулу для  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ , найдите приближенное значение для величины  $\operatorname{tg} 1$ . Оценку погрешности производить не обязательно.

10. Используя формулу  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  для  $f(x) = (a + \alpha x)^{b+\beta x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x = 0.01$ , оцените  $2.02^{2.99}$ .

11. Используя формулу  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  для  $f(x) = (a + x \cos \varphi)^{b+x \sin \varphi}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x = 0.01$ , оцените  $A = (2 + 0.01 \cos \varphi)^{3+0.01 \sin \varphi}$ . При каком  $\varphi$  будет иметь место равенство  $A = 2^3$ ?

12. Используя упрощенное правило Лопиталья,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  если  $f(x) - f(a) = o(1)$ , вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[12]{1+3x} - \sqrt[15]{1+5x}}{x}$

13. Используя упрощенное правило Лопиталья второго порядка,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2} f''(a)$  если одновременно  $f(x) - f(a) = o(1)$ ,  $f'(x) - f'(a) = o(1)$  и  $\exists f''(a)$  вычислите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[18]{1+3x} - \sqrt[24]{1+4x}}{x^2}$

14. Используя упрощенное правило Лопиталья третьего порядка,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^3} = \frac{1}{6} f'''(a)$  если одновременно  $f(x) - f(a) = o(1)$ ,  $f'(x) - f'(a) = o(1)$ ,  $f''(x) - f''(a) = o(1)$  и  $\exists f^{(3)}(a)$ , вычислите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x) - 3 \operatorname{tg}(x)}{x^3}$

15. Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \arcsin 2x - 4x}{x^5}$

16. Нарисуйте эскиз графика функции  $y = \int_0^x (x+1)^2 \cdot (x-3)^3 dx$ . Найдите координаты характерных точек (экстремумы, перегибы).

17. Нарисуйте эскиз графика функции  $y = (\ln(x))^4$ .

18. Неопределенный интеграл  $\int \ln(-x) dx$  равен (константа  $C$  для краткости опущена):  
 (a)  $x \ln x + x$ . (b)  $-x \ln x + x$ . (c)  $x \ln(-x) + x$ . (d)  $-x \ln(-x) + x$ . (e)  $x \ln(-x) - x$ .  
 (f)  $-x \ln(-x) - x$ .

19. Площадь фигуры на плоскости, ограниченной параболой  $y = -x^2$  и прямой  $y = 2x$ , равна:  
 (a)  $\frac{3}{2}$ . (b)  $\frac{4}{3}$ . (c)  $\frac{2}{3}$ . (d)  $\frac{9}{4}$ . (e)  $\frac{8}{9}$ . (f)  $\frac{9}{8}$ .

20. Предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3 + 9} - \sqrt[3]{x^3 - 15})$  равен:  
 (a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 4. (e) 8. (f) Конечный предел не существует.

21. Исследуйте поведение каждой из следующих функций при  $x \rightarrow +0$ :  
 (I)  $f_1(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . (II)  $f_2(x) = (1+x)^{1/x}$ . (III)  $f_3(x) = \frac{x}{\sin x}$ . (IV)  $f_4(x) = \log_3 x$ .  
 (V)  $f_5(x) = -3^x$ . (VI)  $f_6(x) = x^{-3}$ . (a)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ .  
 (c) Функция  $f(x)$  является неограниченной в окрестности  $x = +0$  (т.е. на некотором интервале  $0 < x < \delta$ ), но утверждение  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$  - неверно. (d) Функция  $f(x)$  является ограниченной в окрестности  $x = +0$  (т.е. на некотором интервале  $0 < x < \delta$ ), но конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  не существует. (e) Существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \neq 0$ . (f) Существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ .

22. Исследуйте свойства функции  $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$  в окрестности точки  $x = 0$  и при  $x \rightarrow 0$ . Примите во внимание, что символ  $o(\dots)$  означает исследование некоторого предела при  $x \rightarrow x_0$ , а символ  $O(\dots)$  означает исследование ограниченности некоторой функции в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Укажите все верные утверждения: (a)  $f(x) = o(1)$ . (b)  $f(x) = O(1)$ .  
 (c)  $f(x) = o(x)$ . (d)  $f(x) = O(x)$ . (e)  $f(x) = o(x^2)$ . (f)  $f(x) = O(x^2)$ .