А.А.Быков, bykv@mail.ru, http://bykv.narod.ru
Т575 (2004-2005) **Домашнее задание 10 учебной недели** **Вариант 1210-15**

1. Вычислите производную 2003-го порядка функции $y = 2^{-x}$.

2. Вычислите производную порядка 100 функции $y = x^2 \cdot \sin(5x)$

3. Вычислите производную порядка n функции $y = e^{x^3}$ в точке $x = 0$

4. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то
(a) $f(x)$ непрерывна в точке x_0.
(b) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
(c) найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.
(d) график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0.
(e) $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция в точке x_0.
(f) $\exists A: \ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$.

5. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $y = \sqrt{19 - x}$, если $x = 3$, $dx = 1$.

6. **(a)** Вычислите производную 100 –го порядка функции $y = \dfrac{1}{x}$. **(b)** Вычислите дифференциал указанного порядка для $x = 1$, $dx = 1$.

7. Пусть $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите du, если $x = 3$, $dx = 0,4$.

8. Пусть $f(x) = e^{4x}$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $u(x) = f(g(x))$. Вычислите d^2u, если $x = 3$, $dx = 0,1$

9. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ для $f(x) = (a + \alpha x)^{b + \beta x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $2.02^{2.99}$.

10. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ для $f(x) = (a + x\cos\varphi)^{b + x\sin\varphi}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.01$, оцените $A = (2 + 0.01\cos\varphi)^{3 + 0.01\sin\varphi}$. При каком φ будет иметь место равенство $A = 2^3$?

11. Используя упрощенное правило Лопиталя, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ если $f(x) - f(a) = o(1)$, вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1 + 15x} - \sqrt[3]{1 + 15x}}{x}$

12. Используя упрощенное правило Лопиталя второго порядка, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \dfrac{1}{2} f''(a)$ если одновременно $f(x) - f(a) = o(1)$, $f'(x) - f'(a) = o(1)$ и $\exists f''(a)$ вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[12]{1 + 6x} - \sqrt[6]{1 + 3x}}{x^2}$

13. Используя упрощенное правило Лопиталя третьего порядка, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^3} = \dfrac{1}{6} f'''(a)$ если одновременно $f(x) - f(a) = o(1)$, $f'(x) - f'(a) = o(1)$, $f''(x) - f''(a) = o(1)$ и $\exists f^{(3)}(a)$, вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\arcsin(x)}{x^3}$

14. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$

15. Нарисуйте эскиз графика функции $y=\int_0^x (x-1)^3\cdot(x-3)^4\,dx$. Найдите координаты характерных точек (экстремумы, перегибы).

16. Нарисуйте эскиз графика функции $y=\Big(\ln(x)\Big)^2$.

17. Неопределенный интеграл $\int xe^x dx$ равен (константа C для краткости опущена):
(a) $\dfrac{x^2}{2}e^x$. **(b)** $\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)e^x$. **(c)** $e^x(x+1)$. **(d)** $e^x(x-1)$. **(e)** $e^x(-x+1)$.
(f) $e^x(-x-1)$.

18. Площадь фигуры на плоскости, ограниченной параболой $y=-x^2$ и прямой $y=-2x$, равна:
(a) $\dfrac{3}{2}$. **(b)** $\dfrac{2}{3}$. **(c)** $\dfrac{4}{3}$. **(d)** $\dfrac{9}{4}$. **(e)** $\dfrac{9}{8}$. **(f)** $\dfrac{3}{4}$.

19. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+64}}}-\sqrt{x-\sqrt{4x-\sqrt{16x-64}}}\right)$ равен:
(a) 0. **(b)** 1. **(c)** 2. **(d)** 4. **(e)** 8. **(f)** Конечный предел не существует.

20. Исследуйте поведение каждой из следующих функций при $x\to+0$:
(I) $f_1(x)=\log_2 x$. **(II)** $f_2(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **(III)** $f_3(x)=x^2$. **(IV)** $f_4(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.
(V) $f_5(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. **(VI)** $f_6(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. **(a)** $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. **(b)** $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$.
(c) Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности $x=+0$ (т.е. на некотором интервале $0<x<\delta$), но утверждение $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$ – неверно. **(d)** Функция $f(x)$ является ограниченной в окрестности $x=+0$ (т.е. на некотором интервале $0<x<\delta$), но конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ не существует. **(e)** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)\neq 0$. **(f)** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$.

21. Исследуйте свойства функции $f(x)=\sin x-x$ в окрестности точки $x=0$ и при $x\to 0$. Примите во внимание, что символ $o(\ldots)$ означает исследование некоторого предела при $x\to x_0$, а символ $O(\ldots)$ означает исследование ограниченности некоторой функции в некоторой окрестности точки x_0. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x)=o(1)$. **(b)** $f(x)=O(1)$.
(c) $f(x)=o(x)$. **(d)** $f(x)=O(x)$. **(e)** $f(x)=o(x^2)$. **(f)** $f(x)=O(x^2)$.