ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

В этой статье объясняется современное общее понимание слова «функция». Статья не для легкого чтения: она требует от читателя внимания к каждому слову, хотя и не предполагает каких-либо специальных знаний, выходящих за рамки средней школы. Имеется также в виду, что читатели умеют обращаться со словами «множество» и «элемент множества».

1. ВВЕДЕНИЕ

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем неправы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самом этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо основные понятия принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определение дальнейших производных понятий.

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение на примерах и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпывающими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

[Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения* функции на *множество* ее *значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим равнозначащим не может заменить определения выражаемого им понятия.]

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{\ }$ будем считать знаком извлечения арифметического квадратного корня. Равенство

$$y=\sqrt{1-x^2} \tag{1}$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2\leqslant 1, \quad y\geqslant 0, \quad x^2+y^2=1. \tag{2}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную красной линией на рис. 1.

Рисунок 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x, удовлетворяющего условиям

$$-1\leqslant x\leqslant 1, \tag{3}$$

вычислить соответствующее ему y, которое удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant y\leqslant 1; \tag{4}$$

2) каждому y, удовлетворяющему неравенству (4), соответствует хотя бы одно такое x, которому по формуле (1) соответствует это заданное y.

Можно сказать, что формула (1) задает *отображение* множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел y, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x\to\sqrt{1-x^2}. \tag{5}$$

Например:

$$\left.\begin{array}{l} -1\to\sqrt{1-(-1)^2}=0, \quad -\frac{4}{5}\to\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}, \\ \frac{3}{5}\to\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}, \quad 0\to\sqrt{1-0^2}=1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если*

а) *задано множество E, которое отображается,*

б) *для каждого элемента x этого множества E задан элемент y, на который элемент x отображается.*

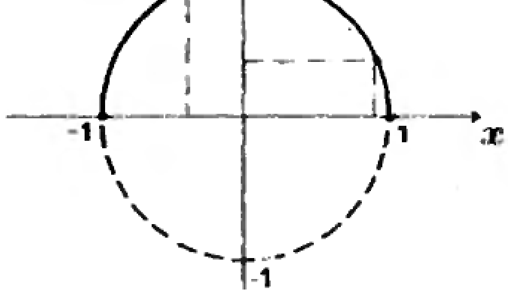


Рис. 1.

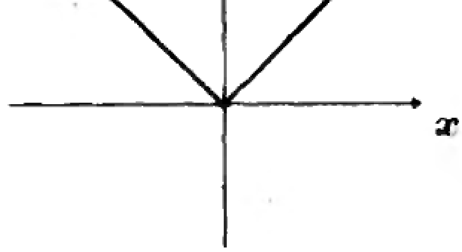


Рис. 2.

Множество всех значений y обозначим буквой M. В примере 1 E — множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M — множество чисел, удовлетворяющих условию (4) *).

П р и м е р 2. Правила

$$1)\ x \to \sqrt{x^2},$$

$$2)\ x \to \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

определяют о д н о и т о ж е отображение

$$x \to |x| \tag{7}$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) $|x|$ (рис. 2).

Отображение (7) отображает множество всех действительных чисел

$$R = (-\infty,\ \infty)$$

на множество

$$R_+ = (0,\ \infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова о т о б р а ж е н и е можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \tag{8}$$

а отображение (7) так:

$$f(x) = |x|. \tag{9}$$

Частные значения функции (8), перечисленные в формулах (6), будут тогда записаны в таком виде:

$$f(-1) = 0, \quad f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}, \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad f(0) = 1.$$

Областью определения функции (9) является множество всех действительных чисел R. Множеством ее значений является множество R_+ неотрицательных действительных чисел.

П р и м е р 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	. . .	28
Петя	■				■				■				■	. . .	
Коля		■				■				■				. . .	
Саша			■				■				■			. . .	
Володя				■				■				■		. . .	■

*) Множество можно обозначить любой буквой. Здесь взяты буквы E (от французского слова ensemble — множество) и M (немецкое — Menge; случайно и русское слово «множество» начинается с этой же буквы). Но это не обязательно: уже в следующем примере мы обозначим множество действительных чисел, как это принято, буквой R (французское reél — действительный, реальный).

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т. е. определили ли некоторую *функцию*? И не начертили ли они *график* этой функции? (Обратите внимание на житейское выражение «установили г р а ф и к дежурств!»)

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля о т о б р а ж е н о на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y=f(x)$ — дежурного в день x. Нет никаких оснований отказывать отображению

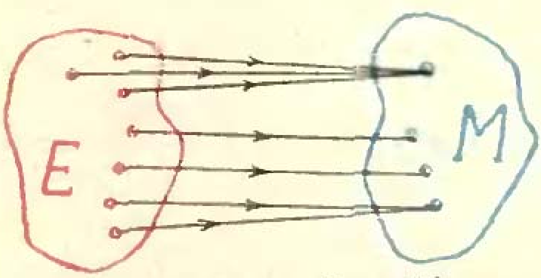
$$\text{день } x \to y = \text{дежурный на день } x$$

в праве называться *функцией* и записать это отображение так:

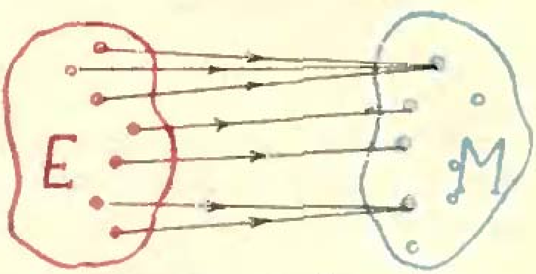
$$y=f(x).$$

Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть функцией с областью определения E и множеством значений M.

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M, мы имеем в виду, что $y=f(x)$ определено для л ю б о г о x из E и



Отображение E на M



Отображение E в M

т о л ь к о для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M, и каждое y из этого множества M является значением функции f хотя бы при одном значении аргумента x.

Если известно только, что значения функции f непременно принадлежат множеству M, но не утверждается, что л ю б о й элемент этого множества является значением функции f, то говорят, что функция отображает свою область определения E в множество M или что отображение f есть отображение множества E в множество M.

Таким образом, надо строго различать смысл выражений

«отображение на множество M»

и

«отображение в множество M»*).

---

*) Заметьте еще, что каждое отображение «на» можно назвать и отображением «в» но не наоборот.

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением R в R, но нельзя сказать, что это «отображение R на R».

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики — *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19).

Пример 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество

$$M = \{A, B\}$$

из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т. е. отображения множества M *в себя*.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т. е. постоянными: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 — отображают множество M на себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это — *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор букв для обозначения «независимого переменного», т. е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т. е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \qquad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \qquad y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \quad f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \quad f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют одну и ту же функцию f, которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим

$$f(1) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(9) = 3$$

и т. д.

3. ОБРАТИМАЯ ФУНКЦИЯ

Функция

$$y=f(x)$$

называется *обратимой* *), если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ примера 4 и функции примеров 1, 2 и 3 необратимы.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1)=f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5 февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция f

$$x \xrightarrow{f} y=-\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве R_+ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$R_-=(-\infty,\ 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества R_-, можно найти соответствующее x по формуле $x=y^2$.

Функция g

$$y \xrightarrow{g} x=y^2 \quad \text{при } y \leqslant 0$$

есть функция, *обратная* к функции f. Она отображает множество R_- на множество R_+. Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного не существен. Функции f и g можно записать в виде

$$f(x)=-\sqrt{x} \quad \text{при } x \geqslant 0, \qquad g(x)=x^2 \quad \text{при } x \leqslant 0.$$

На рисунке 3 изображены графики взаимно обратных функций f и g.

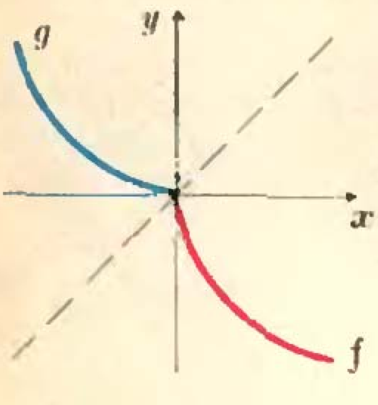


Рис. 3.

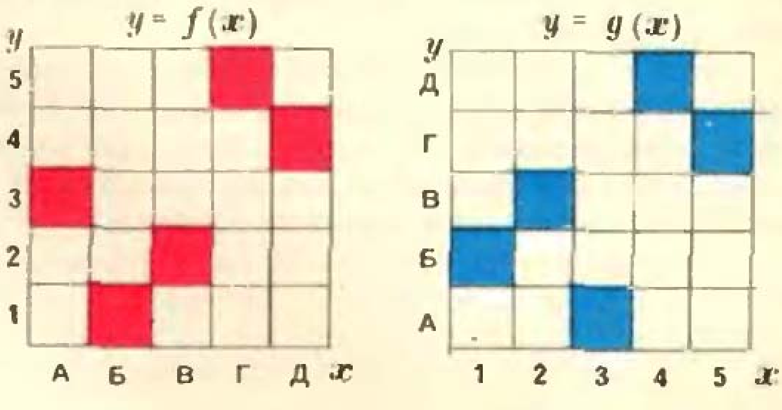


Рис. 4.

---

*) Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.

П р и м е р 6. Функция f, заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
$y=f(x)$	3	1	2	5	4

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений есть множество первых пяти натуральных чисел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y=g(x)$	Б	В	А	Д	Г

На рисунке 4 даны графики этих функций.

Дадим точные определения. Пусть f — отображением множества E на множество M. Если для любого элемента y из множества M существует один-единственный элемент

$$x=g(y)$$

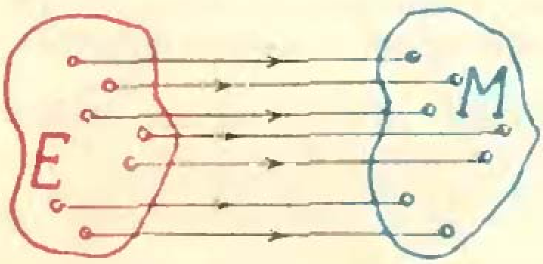
множества E, для которого

$$f(x)=y,$$

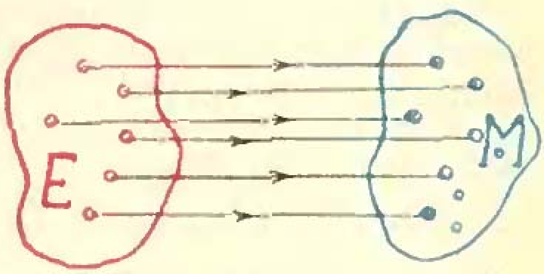
то отображение f является *обратимым*, а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f *).



Обратимое отображение E на M



Обратимое отображение E в M

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g. Отображение, обратное к f, принято обозначать знаком f^{-1}. Например, если

$$f(x)=x^3,$$

то

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображения», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция».

*) Такие отображения называются еще *взаимно однозначными* отображениями E на M.

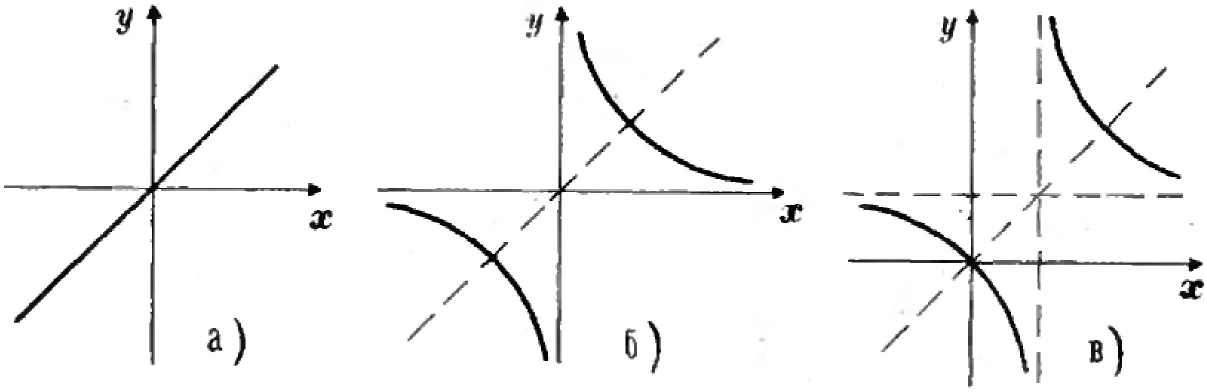


Рис. 5.

Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} есть область определения функции f.

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1}, является исходная функция f:

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

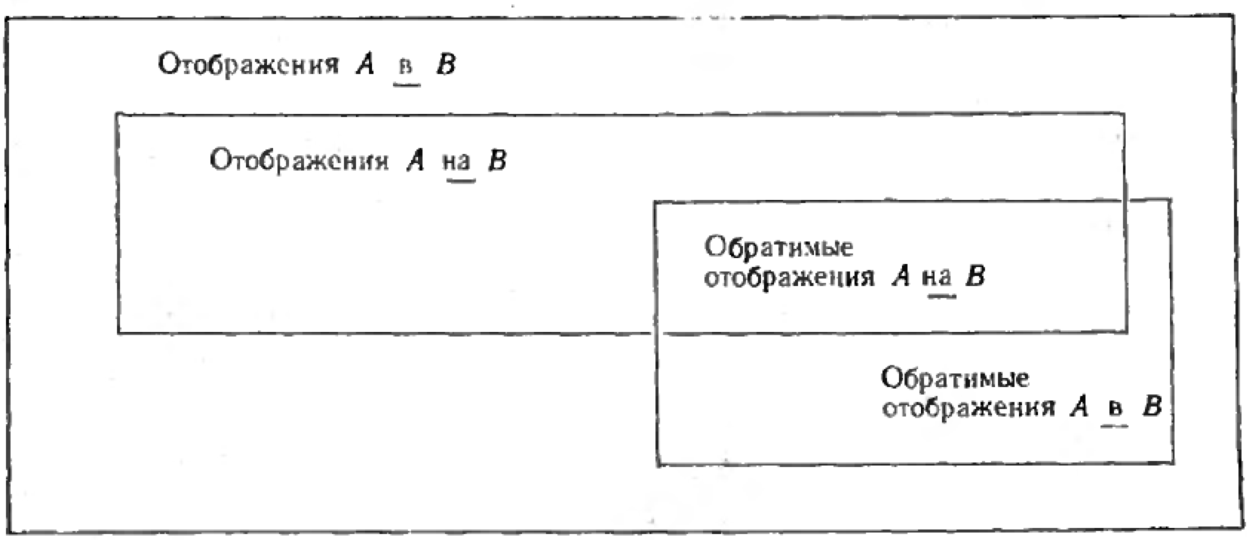
Таким образом, функции f и f^{-1} всегда взаимно обратны.

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

а) $f(x)=x$, б) $f(x)=\frac{1}{x}$, в) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Проверьте! Графики этих функций даны на рисунке 5. Заметьте, что все эти графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т. е. прямой $y=x$.

Изобразим схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и A в множество B.



Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A в B. Если при таком отображении образ A совпадает с B, говорят об отображении A на B.

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция» и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначный» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

1) отображение A на B французы называют «сюръективными», или «сюръекциями»;

2) обратимые отображения A в B они называют «инъективными» или «инъекциями»,

3) обратимые отображения A на B во французской терминологии называются «биективными», или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «в» и «на» такое обилие терминов излишне.

ЗАДАЧИ

Нуликом отмечены совсем легкие вопросы, отвечая на которые, вы можете проверить, поняли ли вы написанное в статье. Более трудные задачи отмечены звездочкой. Не обязательно их решать все.

1. Введение

1°. Найдите области определения и множества значений следующих функций:

$$\text{а) } y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{б) } y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

2. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть x обозначается $[x]$. Например,

$$[0] = 0, \quad [7{,}5] = [7] = 7, \quad [-0{,}3] = -1, \quad [-\pi] = -4.$$

Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* числа x и обозначается $\{x\}$. Постройте графики следующих функций и найдите их области определения и множества значений:

$$\text{а) } f_1(x) = [x], \quad \text{б) } f_2(x) = \{x\}, \quad \text{в) } f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}, \quad \text{г) } f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|,$$

$$\text{д*) } f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right], \quad \text{е*) } f_6(x) = \frac{1}{[x]}, \quad \text{ж*) } f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}, \quad \text{з*) } f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}.$$

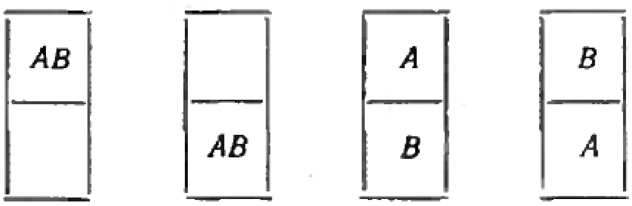
3*. Для любого натурального числа n определим $s(n)$ как сумму делителей числа n (не считая самого n). Например,

$$s(1) = 0, \quad s(2) = 1, \quad s(6) = 6, \quad s(12) = 16, \quad s(28) = 28, \ \ldots$$

Доказать что, $s(n)$ не принимает значений 2 и 5.

2. Функция

4°. Два человека (A и B) могут поселиться в двух комнатах четырьмя разными способами:



Сколькими способами можно поселить: а) двух человек в трех комнатах, б) трех человек в двух комнатах, в) трех человек в двух комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась незанятой?

5°. Множество M состоит из трех элементов, а множество N — из двух элементов. Сколько существует: а) отображений M в N, б) отображений M на N, в) отображений N в M, г) отображений N на M?

6. Сколько существует семизначных телефонных номеров? Какое число из них образовано только цифрами 0, 1, 2 и 3?

7. Докажите, что существует более миллиона функций, принимающих только два значения 0 и 1 и определенных на множестве первых двадцати натуральных чисел.

8. Множество M состоит из m элементов, а множество N из n элементов. Сколько существует функций, определенных на множестве M со значениями, принадлежащими множеству N?

Замечание. Задачи **8**, **11**, **18**, **19** принадлежат к числу основных задач комбинаторики. Мы приводим их здесь, чтобы показать, что комбинаторика в значительной своей части и занимается подсчетом числа отображений того или иного типа конечных множеств в конечные множества.

9. Сколькими способами можно рассадить: а) двух гостей на двух стульях, б) трех — на трех стульях, в) шестерых — на шести стульях?

10. Множество E состоит из шести элементов. Показать, что существует ровно 720 функций, для которых E является как областью определения, так и множеством значений.

11. Отображение конечного множества на себя называется *подстановкой*. Число различных подстановок множества зависит только от числа его элементов n и обозначается $n!$. Покажите, что

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720.$$

Укажите общий способ вычисления $n!$

3. Обратимая функция

12°. Какие из следующих функций обратимы и какие не обратимы?

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^4, \quad f_3(x) = x^{17}, \quad f_4(x) = x^{18}$$

13. В классе за каждой партой сидит не более двух человек. Поставим в соответствие каждому ученику его соседа по парте, а если он сидит один, то его самого. Каково будет обратное отображение?

14. Пусть каждому слову русского языка поставлено в соответствие слово, записанное теми же буквами, но в обратном порядке (*словом* назовем любую конечную последовательность букв). Является ли эта функция обратимой? Если да, то какова обратная функция?

15. Отображение конечного множества на себя всегда обратимо. Дайте пример необратимого отображения множества натуральных чисел на себя.

16. Девять туристов должны разместиться в трех лодках. Сколькими способами они могут это сделать, если требуется, чтобы: а) в каждой лодке было по три человека, б) в каждой лодке было не более четырех и не менее двух человек, в) в каждой лодке плыл хотя бы один турист? (Лодки имеют номера: № 1, № 2, № 3.)

17*. Если у хозяев достаточно стульев, то не принято сажать на один стул более одного гостя: множество гостей отображается в множество стульев обратимым образом. Если в комнате всего шесть стульев, то сколькими способами можно рассадить на них: а) одного гостя, б) двух гостей, в) трех, г) четырех, д) пять, е) шесть гостей?

18*. Обратимые отображения одного конечного множества M в другое конечное множество N называются в комбинаторике *размещениями* (гостей «размещают» по стульям). Число отображений множества M в множество N зависит только от числа элементов m множества M и числа n элементов множества N и обозначается A_n^m. Покажите, что

$$A_1^1 = 1, \quad A_2^1 = A_2^2 = 2, \quad A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = A_3^3 = 6, \quad A_{10}^2 = 90,$$

и установите общее правило вычисления A_n^m. Покажите, что всегда $A_n^{n-1} = A_n^n$.

19*. Задача **16в** может быть сформулирована абстрактно: сколько существует отображений множества из девяти элементов на множество из трех элементов. Обозначим D_n^m число отображений множества из n элементов на множество из m элементов. Проверьте, что

$$D_3^2 = 6, \quad D_4^2 = 12, \quad D_4^3 = 36, \quad D_n^n = n!$$

Попробуйте дать общее правило вычисления D_n^m (это несколько более трудная задача, чем задачи **8**, **11** и **18**).

20*. Сколько существует функций, определенных на множестве из 28 элементов, которые принимают каждое из четырех значений П, К, С и В по шесть раз?

Это задача о числе способов справедливо распределить в феврале дежурства между Петей, Колей, Сашей и Володей (пример 3 на стр. 29).