T557 (2003) **Анализ, Семестр 1, Экзамен** Анализ 1-12

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ не является бесконечно большой отрицательной при $x \to +\infty$", т.е. отрицание к утверждению $f(x) \to -\infty$

2. Докажите, что если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B,$ то $\exists \lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = A\cdot B.$

3. Отнесите каждую из следующих последовательностей:
(I) $x_n = \dfrac{n^{2002}}{3^n}$ **(II)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\log_3 n + 1}$ **(III)** $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \dfrac{n!}{4^n}$ **(V)** $x_n = \dfrac{2^n}{n^n}$ **(VI)** $x_n = \dfrac{\log_{2002} n}{2^n}$
к одному из следующих типов:
(a) Последовательность x_n является бесконечно большой положительной.
(b) Последовательность x_n является бесконечно большой, но не является бесконечно большой положительной.
(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является бесконечно большой.
(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

4. **(a)** Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.
(b) Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to a$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Сформулируйте определение того, что данное число b не является предельной точкой последовательности, используя понятие подпоследовательности.

7. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная на промежутке $[a;\ b]$. Сформулируйте достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(b);\ f(a)]$.

8. Сформулируйте и докажите первую теорему Вейерштрасса

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b]\ f(x) \leqslant f(c).$

10. Если функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0,$ и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $(a;\ b)$, то (завершите формулировку и докажите)

11. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя для вычисления $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если $\exists f'(x)$ в точке $x = x_0$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Используя эту формулу для $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, найдите приближенное значение для величины $\cos 1$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \sin(u)$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \ln(1-x)$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 3$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\ln(0,5)$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a;\ a+\delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a-\delta;\ a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M\Big(a;\ f(a)\Big)$ график функции имел точку перегиба? Ответ обоснуйте.

16. Сформулируйте признак Даламбера для сходимости (расходимости) числового ряда с положительными членами в форме, использующей предел некоторой последовательности. Докажите ту часть признака, которая гарантирует сходимость.

17. **Теорема.** $o(x^{\gamma}) + o(x^{3\gamma}) = o(x^4)$ при $x \to +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^8 + \dfrac{72}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = 0,\ f^{(4)}(x_0) = 0,\ f^{(5)}(x_0) \neq 0,$ то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

20. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^5} & \text{если } x > 0, \\ e^{1/x^5} & \text{если } x < 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю: $\exists f'(0) = 0$.