T557 (2003) **Анализ, Семестр 1, Экзамен** Анализ 1-17

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ не является бесконечно большой положительной при $x \to -\infty$", т.е. отрицание к утверждению $f(x) \to +\infty$

2. Докажите, что если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}\Big(f(x) - g(x)\Big) = A - B$.

3. Отнесите каждую из следующих последовательностей:
(I) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ **(II)** $x_n = \dfrac{n^{33}}{3^n}$ **(III)** $x_n = \dfrac{125^n}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \dfrac{\log_9 n}{9^n}$ **(V)** $x_n = \dfrac{n}{\log_2 n + 1}$ **(VI)** $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$
к одному из следующих типов:
(a) Последовательность x_n является бесконечно большой положительной.
(b) Последовательность x_n является бесконечно большой, но не является бесконечно большой положительной.
(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является бесконечно большой.
(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

4. **(a)** Сформулируйте отрицание определения фундаментальной последовательности (т.е. определение последовательности, которая не является фундаментальной).
(b) Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to a$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

7. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная на промежутке $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

8. Докажите, что функция, не являющаяся ограниченной на сегменте, не может быть непрерывной на этом сегменте.

9. Сформулируйте и докажите вторую теорему Вейерштрасса

10. Сформулируйте теорему Коши (свойство непрерывной функции, принимающей различные значения на концах сегмента $[a,\ b]$).

11. Используя обобщенную формулу конечных приращений (формулу Коши), докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;\ b)$, $c \in (a;\ b)$, $f(c) = 0$, $g(c) = 0$, $\forall x \in (a;\ b)\ g'(x) \neq 0$, и $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\exists A:\ \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, найдите приближенное значение для величины $\operatorname{ctg} 2$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \cos(u)$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 3$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\dfrac{1}{0,5}$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие третью производную.

16. Сформулируйте признак Даламбера для сходимости (расходимости) числового ряда с положительными членами в форме, не использующей предел некоторой последовательности. Докажите ту часть признака, которая гарантирует отсутствие сходимости.

17. Теорема. $o(x^7) + o(x^\gamma) = o(x^4)$ при $x \to +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \dfrac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(x)$ при $x = 0$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.