

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы \forall , \exists , \lim и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ не является бесконечно большой отрицательной при $x \rightarrow +\infty$ ", т.е. отрицание к утверждению $f(x) \rightarrow -\infty$

2. Докажите, что если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

3. Отнесите каждую из следующих последовательностей:

(I) $x_n = \frac{n^{2002}}{3^n}$ (II) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\log_3 n + 1}$ (III) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (IV) $x_n = \frac{n!}{4^n}$ (V) $x_n = \frac{2^n}{n^n}$ (VI) $x_n = \frac{\log_{2002} n}{2^n}$

к одному из следующих типов:

- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой положительной.
 (b) Последовательность x_n является бесконечно большой, но не является бесконечно большой положительной.
 (c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является бесконечно большой.
 (d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

4. (a) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

(b) Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \rightarrow a$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Сформулируйте определение того, что данное число b не является предельной точкой последовательности, используя понятие подпоследовательности.

7. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная на промежутке $[a; b]$. Сформулируйте достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(b); f(a)]$.

8. Сформулируйте и докажите первую теорему Вейерштрасса

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b] : \forall x \in [a; b] f(x) \leq f(c)$.

10. Если функция $f(x)$ определена на $[a; b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $(a; b)$, то (завершите формулировку и докажите)

11. Сформулируйте и докажите правило Лопиталья для вычисления $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если $\exists f'(x)$ в точке $x = x_0$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Используя эту формулу для $x_0 = \frac{\pi}{3}$, найдите приближенное значение для величины $\cos 1$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $u(t)$ – функция независимой переменной t . Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \sin(u)$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \ln(1-x)$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 3$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\ln(0,5)$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a; a + \delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a - \delta; a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M(a; f(a))$ график функции имел точку перегиба? Ответ обоснуйте.

16. Сформулируйте признак Даламбера для сходимости (расходимости) числового ряда с положительными членами в форме, использующей предел некоторой последовательности. Докажите ту часть признака, которая гарантирует сходимость.

17. Теорема. $o(x^{-\gamma}) + o(x^{-2\gamma}) = o(x^{-3})$ при $x \rightarrow +\infty$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^6 - p = \frac{48}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

20. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю: $\exists f'(0) = 0$.