

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы \forall , \exists , \lim и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ "

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

1 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 2 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 3 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$ 4 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 5 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$

6 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$

3. Пусть $x_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$, $n > 1$; $x_1 = 1$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее: (a) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (d) $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
(e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (f) $x_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

4. (a) Сформулируйте отрицание определения фундаментальной последовательности (т.е. определение последовательности, которая не является фундаментальной).

(b) Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \rightarrow a$ по "Гейне". Докажите, что если существует $\lim_{x \rightarrow a}$ "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = a^x$

8. Докажите, что функция, не являющаяся ограниченной на сегменте, не может быть непрерывной на этом сегменте.

9. Сформулируйте и докажите вторую теорему Вейерштрасса

10. Сформулируйте теорему Коши (свойство непрерывной функции, принимающей различные значения на концах сегмента $[a, b]$).

11. Сформулируйте и докажите обобщенную формулу конечных приращений (Коши) для вычисления $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Поясните, как используется эта формула для доказательства правила Лопиталья

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\exists A$: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = 81$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[4]{80}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t . Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \sqrt{x}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = e^{-x}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение e^{-1} . Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие третью производную.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая использует предел некоторой последовательности. Докажите необходимое условие сходимости. Приведите пример.

17. Теорема. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 8 \cos x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0 , в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$