T557 (2003)

Анализ, Семестр 1, Экзамен

Анализ 1-23

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$"

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

$\boxed{1}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x^{-2}) = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$

$\boxed{5}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$

x

3. Пусть $x_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее:

(a) $x_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(b)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(d)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ **(f)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

4. **(a)** Сформулируйте отрицание определения фундаментальной последовательности (т.е. определение последовательности, которая не является фундаментальной).
(b) Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \to +\infty$ "по Гейне". Докажите, что если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}$ "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Докажите, что из любой ограниченной числовой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = \operatorname{arctg} x$

8. Докажите, что функция, непрерывная на сегменте, ограничена сверху на этом сегменте

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b]\ f(x) \geqslant f(c)$.

10. Сформулируйте теорему Коши (свойство непрерывной функции, принимающей различные значения на концах сегмента $[a,\ b]$).

11. Используя обобщенную формулу конечных приращений (формулу Коши), докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;\ b)$, $c \in (a;\ b)$, $f(c) = 0$, $g(c) = 0$, $\forall x \in (a;\ b)\ g'(x) \neq 0$, и $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = 16$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[4]{15}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \ln x$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \sin x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\sin(1)$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие только первую производную.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая использует предел некоторой последовательности. Докажите достаточное условие сходимости. Приведите пример.

17. **Теорема.** $o(x^{-3}) + o(x^{-5}) = o(x^{\gamma})$ при $x \to +\infty$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 9\cos x + p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$