

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы \forall , \exists , \lim и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ не имеет предела при $x \rightarrow a$ "

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

1 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$
 2 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$
 3 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 4 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$
 5 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$
 6 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

3. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot \ln n}$, $n > 1$; $x_1 = 1$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее: (a) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (d) $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (f) $x_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

4. (a) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.
 (b) Докажите, что фундаментальная последовательность имеет единственную предельную точку.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \rightarrow +\infty$ "по Гейне". Докажите, что если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = \arcsin x$

8. Объясните, в каком месте нарушится ход доказательства первой теоремы Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить "сегмент" на "интервал"

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b] : \forall x \in [a; b] f(x) \leq f(c)$.

10. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a, b]$.

11. Сформулируйте и докажите правило Лопиталья для вычисления $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если $\exists A : f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то $\exists f'(x)$ в точке $x = x_0$. Используя эту формулу для $x_0 = 32$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[5]{33}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t . Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \frac{1}{x}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = e^x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение e^1 . Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие вторую производную.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая не использует предел некоторой последовательности. Докажите необходимое условие сходимости. Приведите пример.

17. Теорема. $o(x^3) + o(x^5) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = 7 \sin x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0 , в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$
Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.