

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы \forall , \exists , \lim и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$ "

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x^{-2})$ при $x \rightarrow +\infty$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

1 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 2 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{-2}) = 0$ 3 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 4 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$

5 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 6 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$

3. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее:

(a) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (d) $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (f) $x_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

4. (a) Сформулируйте отрицание определения фундаментальной последовательности (т.е. определение последовательности, которая не является фундаментальной).

(b) Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \rightarrow +\infty$ "по Гейне". Докажите, что если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Докажите, что из любой ограниченной числовой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = \operatorname{arctg} x$

8. Докажите, что функция, непрерывная на сегменте, ограничена сверху на этом сегменте

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b] : \forall x \in [a; b] f(x) \geq f(c)$.

10. Если функция $f(x)$ определена на $[a; b]$, $f(a) < f(b)$, и $\exists c \in (f(a); f(b))$: уравнение $f(x) = c$ не имеет корней на $(a; b)$, то (завершите формулировку и докажите)

11. Используя обобщенную формулу конечных приращений (формулу Коши), докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a; b)$, $c \in (a; b)$, $f(c) = 0$, $g(c) = 0$, $\forall x \in (a; b) g'(x) \neq 0$, и $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = 16$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[4]{15}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t . Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \ln x$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \sin x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\sin(1)$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие только первую производную.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая использует предел некоторой последовательности. Докажите достаточное условие сходимости. Приведите пример.

17. Теорема. Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow +\infty$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ . Укажите все возможные значения γ , при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = p - 11 \sin x$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0 , в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$
Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.