T557 (2003) **Анализ, Семестр 1, Экзамен** Анализ 1-27

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ "

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

$\boxed{1}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{5}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$
$\boxed{6}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$
x

3. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln n}, n > 1;\ x_1 = 1$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее: **(a)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(b)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(d)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
(e) $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ **(f)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

4. **(a)** Сформулируйте отрицание определения фундаментальной последовательности (т.е. определение последовательности, которая не является фундаментальной).
(b) Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \to a$ по "Гейне". Докажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a}$ "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = a^x$

8. Докажите, что функция, не являющаяся ограниченной на сегменте, не может быть непрерывной на этом сегменте.

9. Обьясните, в каком месте будет нарушен ход доказательства второй теоремы Вейерштрасса, если в условии этой теоремы заменить "сегмент" на "интервал"

10. Сформулируйте теорему Коши (свойство непрерывной функции, принимающей различные значения на концах сегмента $[a,\ b]$).

11. Сформулируйте и докажите обобщенную формулу конечных приращений (Коши) для вычисления $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Поясните, как используется эта формула для доказательства правила Лопиталя

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то $\exists A :\ \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Используя эту формулу для $x_0 = 81$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[4]{80}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \sqrt{x}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = e^{-x}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение e^{-1}. Выполните оценку остаточного члена.

15. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие третью производную.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая использует предел некоторой последовательности. Докажите необходимое условие сходимости. Приведите пример.

17. **Теорема.** $o(x^3) + o(x^5) = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = 7\sin x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.