T557 (2003)

Анализ, Семестр 1, Экзамен

Анализ 1-28

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте определение: "Число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$"

2. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны:

$\boxed{1}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x^{-1}) = 0$

3. Пусть $x_n = \dfrac{\ln n}{n^3}$ – последовательность. Укажите все верные утверждения из числа перечисленных далее:
(a) $x_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(b)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(d)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ **(f)** $x_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

4. **(a)** Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.
(b) Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

5. Сформулируйте определение функции, не имеющей предела при $x \to a$ "по Гейне". Докажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a}$ "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Докажите, что ограниченная числовая последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании сложной функции. Поясните, как можно использовать эту теорему для вывода формулы производной обратной функции.

8. Сформулируйте и докажите первую теорему Вейерштрасса

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b]\ f(x) \leqslant f(c)$.

10. Если функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $(a;\ b)$, то (завершите формулировку и докажите)

11. Найдите ошибку в следующем доказательстве обобщенной формулы конечных приращений (Коши) для вычисления $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Доказательство: $\exists \xi :\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$,
$g(b) - g(a) = (b-a)g'(\xi) \Longrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Поясните, как используется эта формула для доказательства правила Лопиталя

12. Сформулируйте определение дифференциала функции $f(x)$. Докажите, что если $\exists f'(x)$ в точке $x = x_0$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Используя эту формулу для $x_0 = 27$, найдите приближенное значение для величины $\sqrt[3]{28}$. Оценку погрешности производить не обязательно.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = x^3$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \cos x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\cos(1)$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a;\ a+\delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a-\delta;\ a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M\Big(a;\ f(a)\Big)$ график функции имел точку перегиба? Ответ обоснуйте.

16. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда с положительными членами в той форме, которая не использует предел некоторой последовательности. Докажите достаточное условие сходимости. Приведите пример.

17. Теорема. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. Заметим, что в формулировке теоремы не указано значение γ. Укажите все возможные значения γ, при которых теорема будет верной.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 8\cos x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень

19. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$