T557 (2003)

Анализ, Семестр 1, Экзамен

Анализ 1-31

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$"

2. Докажите, что если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и $b \neq 0$, то $\dfrac{1}{b+f(x)}$ – ограниченная функция в окрестности точки $x = a$

3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$, если $b > 1$

4. Сформулируйте отрицание критерия Коши для предела функции $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, т.е. критерий отсутствия упомянутого предела

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to a$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$. Докажите, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = \arcsin x$

8. Докажите, что функция, не являющаяся ограниченной на сегменте, не может быть непрерывной на этом сегменте.

9. Сформулируйте и докажите вторую теорему Вейерштрасса

10. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, неперерывной в заданной точке

11. Сформулируйте и докажите обобщенную формулу конечных приращений (Коши) для вычисления $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Поясните, как используется эта формула для доказательства правила Лопиталя

12. Укажите все верные утверждения:
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то

1 найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна
2 найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена
3 график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0
4 $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$
5 $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$
6 $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = x \ln x$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{1-x}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 2$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\sqrt{0,5}$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Обьясните, как найти все наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$

16. Сформулируйте признак Абеля-Дирихле для сходимости числового ряда. Поясните идею доказательства.

17. **Решение нелинейных уравнений.** Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a-\delta;\ a+\delta)$, $\delta > 0$, $f'(x) > 0$, $f(a) = 0$, $f''(x) > 0$ на $(a;\ a+\delta)$, $f''(x) < 0$ на $(a-\delta;\ a)$, начальная точка $x_0 \in (a;\ a+\delta)$. Запишите формулу метода Ньютона для решения уравнения $f(x) = 0$, поясните графически итерационный процесс, Поясните идею доказательства того, что итерационная последовательность, стартующая с точки x_0, сходится к корню $x = a$.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\ln x = px^8 + 3$ имеет единственный корень. Найдите этот корень

19. Докажите, что при любом фиксированном значении параметра x числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится и его сумма равна e^x

20. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-x} & \text{если } x > 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет правую производную и найдите ее значение