T557 (2003) Анализ, Семестр 1, Экзамен Анализ 1-32

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$"

2. Докажите, что если $g(x)$ и $f(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то $f(x)+g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$

4. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to a$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x \in (a;\ b)$. Докажите, что $\forall c \in (a;\ b)\ \exists \lim\limits_{x\to c-0} f(x)$

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = a^x$

8. Сформулируйте и докажите первую теорему Вейерштрасса

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b]\ f(x) \leqslant f(c)$.

10. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и выполнены два условия:
(a) $\forall\delta > 0\ \exists x:\ a-\delta < x < a,\ f(x) < 0$ и **(b)** $\forall\delta > 0\ \exists x:\ a < x < a+\delta,\ f(x) > 0$, то $f(a) = 0$.

11. Найдите ошибку в следующем доказательстве обобщенной формулы конечных приращений (Коши) для вычисления $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Доказательство: $\exists\xi:\ f(b)-f(a) = (b-a)f'(\xi)$, $g(b)-g(a) = (b-a)g'(\xi) \Longrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Поясните, как используется эта формула для доказательства правила Лопиталя

12. Укажите все верные утверждения:
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то

1	найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена
2	график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0
3	$f(x)-f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$
4	найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна
5	$f(x)$ непрерывна в точке x_0.
6	$\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \ln(1+x)$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 2$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\dfrac{1}{\sqrt{1,5}}$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Обьясните, что такое точка возможного экстремума функции $y = f(x)$, сформулируйте и докажите необходимое условие экстремума дифференцируемой функции

16. Сформулируйте признак Лейбница для сходимости числового ряда с членами чередующихся знаков. Поясните идею доказательства.

17. **Решение нелинейных уравнений.** Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, дважды дифференцируема на $(a;\ b)$, $f'(x) > 0$ на $(a;\ b)$, $f''(x) > 0$ на $(a;\ b)$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f(c) = 0$, $c \in (a;\ b)$. Запишите формулу метода хорд для решения уравнения $f(x) = 0$ с неподвижной точкой $x = b$, поясните графически итерационный процесс. Поясните идею доказательства того, что итерационная последовательность сходится к корню $x = c$.

18. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $\ln x = 4x^{12} - p$ имеет единственный корень. Найдите этот корень

19. Докажите, что при любом фиксированном значении параметра x числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ сходится и его сумма равна e^{-x}

20. Докажите, что функция $y = x \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$ в точке $x = 0$ имеет производную и найдите ее значение