T557 (2003)

Анализ, Семестр 1, Экзамен

Анализ 1-33

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$"

2. Докажите, что если функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a, $g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

4. Сформулируйте отрицание критерия Коши для предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, т.е. критерий отсутствия упомянутого предела

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to +\infty$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Гейне", то существует и предел "по Коши" и эти пределы равны.

6. Докажите, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании сложной функции. Поясните, как можно использовать эту теорему для вывода формулы производной обратной функции.

8. Докажите, что функция, непрерывная на сегменте, ограничена сверху на этом сегменте

9. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b]\ f(x) \geqslant f(c)$.

10. Докажите, что если $f(a) > 0$ и $\forall \delta > 0\ \exists x :\ 0 < |x - a| < \delta,\ f(x) < 0$, функция $f(x)$ не может быть непрерывной в точке $x = a$

11. Используя обобщенную формулу конечных приращений (формулу Коши), докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;\ b)$, $c \in (a;\ b)$, $f(c) = 0$, $g(c) = 0$, $\forall x \in (a;\ b)\ \ g'(x) \neq 0$, и $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Укажите все верные утверждения:
Если график функции $y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке $x = x_0$, то

1. $\exists A :\ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$
2. $f(x)$ непрерывна в точке x_0.
3. найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна
4. функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0
5. $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$
6. найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \dfrac{1}{1+x}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ с центром в точке $x_0=0$ для $n=2$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\dfrac{1}{\sqrt{0,5}}$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Докажите, что если $f''(x)>0$ на промежутке $x\in(a;\ b)$, то функция $y=f(x)$ на этом промежутке является выпуклой вниз

16. Сформулируйте теорему о перестановке членов условно сходящегося числового ряда. Поясните идею доказательства.

17. **Решение нелинейных уравнений.** Предположим, что функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f(x)$ возрастает на $(a;\ b)$, $f(x)$ выпукла вниз на $(a;\ b)$. Запишите формулу метода хорд для решения уравнения $f(x)=0$ с неподвижной точкой $x=b$, поясните графически итерационный процесс. Поясните идею доказательства того, что итерационная последовательность сходится к корню $c\in(a;\ b)$.

18. Пусть значение параметра p таково, что $p>0$ и уравнение $\ln x=px^5$ имеет единственный корень. Найдите этот корень

19. Докажите, что при любом фиксированном значении параметра x числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходится и его сумма равна $\sin x$

20. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases}x^{x+1} & \text{если } x>0,\\ 0 & \text{если } x=0,\end{cases}$ в точке $x=0$ имеет правую производную и найдите ее значение