T557 (2003)

Анализ, Семестр 1, Экзамен

Анализ 1-34

На выполнение работы отводится 90 минут. Ответы на вопросы формулируйте в письменной форме. Переписывать вопросы не нужно, пишите только ответы. Отвечать на вопросы можно в произвольном порядке. Писать что-либо на варианте с заданиями не разрешается. Формулируйте ответы кратко, используйте символы $\forall$, $\exists$, $\lim$ и т.д. вместо соответствующих слов. В начале работы просмотрите все вопросы и отметьте те, ответы на которые Вы знаете хорошо. В первые 45 минут работы не тратьте на один вопрос более 5 минут. По окончании работы Вы сдадите вариант с заданиями и Ваши ответы в письменной форме экзаменатору. После 15-минутного перерыва начнется устная часть экзамена, в ходе которой экзаменатор проверит Ваши ответы в Вашем присутствии. При этом Вам могут быть заданы как уточняющие вопросы, так и дополнительные вопросы по темам, не вошедшим в Ваш вариант. Положительную оценку можно получить, ответив не на все вопросы. Желаем успеха!

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $y = f(x)$ не имеет предела при $x \to +\infty$"

2. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и ограничена на множестве $\mathcal{X} = [a;\ +\infty)$, $g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, то $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, если $\alpha > 0$

4. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. Сформулируйте определение предела функции при $x \to +\infty$ по Гейне. Докажите, что если существует упомянутый предел "по Коши", то существует и предел "по Гейне" и эти пределы равны.

6. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x \in (a;\ b)$. Докажите, что $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Вычислите производную функции $y = \operatorname{arctg} x$

8. Обьясните, в каком месте нарушится ход доказательства первой теоремы Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить "сегмент" на "интервал"

9. Обьясните, в каком месте будет нарушен ход доказательства второй теоремы Вейерштрасса, если в условии этой теоремы заменить "сегмент" на "интервал"

10. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, неперерывной в заданной точке

11. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя для вычисления $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. В каком месте доказательства использовано условие $g'(x) \neq 0$?

12. Укажите все верные утверждения:
Если график функции $y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке $x = x_0$, то

- **1** найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна
- **2** функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0
- **3** $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$
- **4** найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена
- **5** $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$
- **6** $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

13. Предположим, что $x = u(t)$ – функция независимой переменной t. Вычислите первый и второй дифференциалы сложной функции $y = \dfrac{1}{1-x}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала" и "неинвариантность второго дифференциала"

14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 2$ (n – степень многочлена Тейлора). Используя формулу Тейлора, вычислите приближенно значение $\sqrt{1,5}$. Выполните оценку остаточного члена.

15. Обьясните, что такое точка возможного перегиба графика функции $y = f(x)$, сформулируйте и докажите необходимое условие перегиба дважды дифференцируемой функции

16. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.

17. **Решение нелинейных уравнений.** Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a-\delta;\ a+\delta)$, $\delta > 0$, $f'(x) > 0$, $f(a) = 0$, $f(x)$ выпукла вниз на $(a;\ a+\delta)$, $f(x)$ выпукла вверх на $(a-\delta;\ a)$, начальная точка $x_0 \in (a;\ a+\delta)$. Запишите формулу метода Ньютона для решения уравнения $f(x) = 0$, поясните графически итерационный процесс. Поясните идею доказательства того, что итерационная последовательность, стартующая с точки x_0, сходится к корню $x = a$.

18. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $\ln x = 5x^3 + 3x^6 - p$ имеет единственный корень. Найдите этот корень

19. Докажите, что при любом фиксированном значении параметра x числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ сходится и его сумма равна $\cos x$

20. Докажите, что функция $y = x\cdot(1-x)^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$ в точке $x = 0$ имеет производную и найдите ее значение